COORDENADAS AOS PONTOS DE UM PLANO. RETAS

MARCELO DIAS PASSOS

Resumo. Estas notas são revisões de notas de aulas digitadas durante os cursos de MATB34 (Geometria Analítica e Álgebra Vetorial) em 2021 (semestres 2021.1 e 2021.2).

Depois de darmos coordenadas aos vetores de um plano, podemos fazê-lo para os pontos. Logo em seguida estamos aptos a dar equações às retas.

1. Coordenadas aos pontos de um plano

Definição 1. *Fixado um plano π, seja $\mathbb{V}^2$ o conjunto dos vetores paralelos a π. Diremos que $\Sigma = (O, \mathcal{B})$ é um **sistema de coordendas para os pontos de** π se, e somente se, $O \in \pi$ e $\mathcal{B}$ é base para $\mathbb{V}^2$.*

*O ponto O será chamado de **origem** de Σ, enquando $\mathcal{B}$ de **base**. Por vezes escreveremos $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ no lugar de $\big(O, (\vec{e_1}, \vec{e_2})\big)$.*

*Para cada $P \in \pi$, já que $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}^2$, diremos que P **tem coordenadas** (x, y) **com relação ao sistema** Σ se, e somente se, $\overrightarrow{OP} = (x, y)_{\mathcal{B}}$. Neste caso, escreveremos "$P = (x, y)_\Sigma$".*

*A primeira coordenada do par citado é chamado de **abscissa do ponto (ou de)** P e a segunda de **ordenada de** P. A reta que passa pela origem e é paralela ao primeiro vetor da base é chamado de **eixo das abscissas** e a reta que também passa pela origem e é paralela ao segundo vetor da base é chamada de **eixo das ordenadas**. Os dois eixos serão chamados de **eixos coordenados**.*

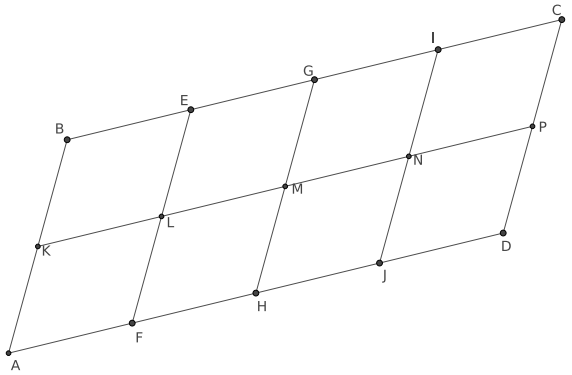
*Se a base é ortonormal, diremos que o sistema é **ortogonal**.*

Observamos que, se $\Sigma = (0, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, para $P \in \pi$,

$$P = (x, y)_\Sigma \text{ se, e somente se, } P = O + x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

Naturalmente, $0 = (0, 0)_\Sigma$.

Visto que trabalharemos dentro do mesmo plano π, vamos parar de fazer menção a ele. Todos os objetos geométricos, aos quais faremos referência, estarão contidos em π.



Exercício 1. *Determine as coordenadas de **todos os pontos da figura ao lado** com relação ao sistema $\Sigma = \big(M, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MG}\big)$.*

Exercício 2. *Ainda usando a figura ao lado, determine os pontos de coordenadas dadas abaixo com relação ao sistema $\Gamma = \big(H, \overrightarrow{HL}, \overrightarrow{HN}\big)$.*

(1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(6)* $(-1, 1)$	*(11)* $(1, 1)$
(2) $(1, -1)$	*(7)* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(12)* $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
(3) $(0, 2)$	*(8)* $(2, 0)$	*(13)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
(4) $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$	*(9)* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$	*(14)* $(0, 1)$
(5) $(1, 0)$	*(10)* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	*(15)* $(0, 0)$

Exercício 3. *Tomando os sistemas Σ e Γ das questões anteriores, se um ponto $X = (a, b)_\Sigma = (x, y)_\Gamma$, determine relação entre a, b, x e y. Procure apresentar essa relação de maneira matricial.*

Proposição 1. *Seja $\Sigma = (0, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do plano. Se $A = (a, b)_\Sigma$ e $B = (x, y)_\Sigma$, então $\overrightarrow{AB} = (x - a, y - b)_{\mathcal{B}}$.*

Date: 2024.

Demonstração. Dado que $\overrightarrow{OA} = (a,b)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{OB} = (x,y)_{\mathcal{B}}$,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x-a, y-b)_{\mathcal{B}} \ .$$

□

Corolário 1. *Seja $\Sigma = (0, \mathcal{B})$ um sistema de coordenada do plano. Se $A = (a,b)_\Sigma$ e $\vec{v} = (p,q)_{\mathcal{B}}$, então $A + \vec{v} = (a+p, b+q)_\Sigma$.*

Demonstração. Seja $Q = A + \vec{v}$. Daí $Q = (x,y)_\Sigma$. Dado que $\overrightarrow{AQ} = \vec{v} = (x-a, y-b)_{\mathcal{B}}$, então $p = x-a$ e $q = y-b$. Ou seja, $Q = (a+p, b+q)_\Sigma$. □

Exercício 4. *Dados os pontos $A = (-2,3)$, $B = (1,4)$, $C = (1,2)$ e $D = (4,3)$, ache as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA}$.*

Exercício 5. *Prove (vetorialmente!) que os pontos $A = (2,1)$, $B = (5,2)$, $C = (6,5)$ e $D = (3,4)$ são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 6. *Sejam $A = (a,b)$ e $B = (x,y)$, pontos distintos. Determine fórmula para as coordenadas de M, o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.*

Exercício 7. *Defina "simetria em relação a um ponto". Sejam $C = (a,b)$ e $P = (\alpha, \beta)$, pontos. Determine as coordenadas do ponto Q, que é simétrico a P com relação a C.*

Exercício 8. *Determine fórmula para as coordenadas do baricentro de um triângulo, sabendo-se as coordenadas dos seus vértices.*

Exercício 9. *O baricentro de um triângulo ABC é $G = (1,6)$ e dois dos seus vértices são $A = (2,5)$ e $B = (4,7)$. Determine seu terceiro vértice.*

Exercício 10. *Sendo $A = (-2,3)$ e $B = (6,-3)$, extremidades de um segmento, determinar:*

(1) os pontos C, D e E que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes de mesmo comprimento;
(2) os pontos F e G que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes de mesmo comprimento.

Exercício 11. *Dados os pontos $A = (3,-4)$ e $B = (-1,1)$, além do vetor $\vec{v} = (-2,3)$, calcular:*
(1) $\overrightarrow{AB} + \vec{v}$ *(2) $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$* *(3) $B + 2\overrightarrow{AB}$* *(4) $3\vec{v} - 2\overrightarrow{BA}$*

Exercício 12. *Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo $ABCD$, para:*
(1) $A = (-3,-1)$, $B = (4,2)$ e $C = (5,5)$ *(2) $A = (5,1)$, $B = (7,3)$ e $C = (3,4)$*

Proposição 2. *Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$. Então A, B e C estão alinhados se, e somente se,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \ .$$

□

Proposição 3. *Seja Σ um sistema de coordenada ortogonal. Se $A = (a,b)_\Sigma$ e $B = (x,y)_\Sigma$, então $d(A,B) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$.*

Demonstração. Visto que a base é ortonomal, $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. □

Exercício 13. *Determine a distância entre os pontos $A = (1,3)$ e $B = (-1,4)$.*

Exercício 14. *Classifique os triângulos abaixo (**eqüilátero**, **isósceles** ou **escaleno**):*

(1) $A = (1,1)$, $B = (3,2)$ e $C = (0,3)$
(2) $D = (-1,1)$, $E = (3,1)$ e $F = (1, 2\sqrt{3}+1)$
(3) $G = (3, 2\sqrt{3})$, $H = (3,0)$ e $I = (0, -\sqrt{3})$

Exercício 15. *Encontrar P, ponto do eixo Ox, tal que a sua distância ao ponto $A = (2,-3)$ é 5.*

Exercício 16. *Provar que os pontos $A = (-2, -1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 6)$ e $D = (-5, 3)$, nesta ordem, são vértices de um quadrado.*

Exercício 17. *Chamamos de **trapézio** um quadrilátero que tem dois, **e somente dois**, lados paralelos. Um trapézio é chamado de **reto** se tem um ângulo reto. Mostre que $ABCD$ é um trapézio reto, onde $A = (6, 5)$, $B = (11, 5)$, $C = (3, 1)$ e $D = (2, 3)$, num sistema ortonormal.*

Exercício 18. *Determine os ângulos internos dos triângulos da questão 14.*

Exercício 19. *Verifique que os pontos $A = (2, 1)$, $B = (-1, 3)$ e $C = (4, -2)$ formam um triângulo. Determine o perímetro e a área deste triângulo.*

Exercício 20. *Prove que o triângulo de vértices $(2, 2)$, $(-4, -6)$ e $(4, -12)$ é retângulo.*

Exercício 21. *Determinar x de modo que o triângulo de vértices $A = (4, 5)$, $B = (1, 1)$ e $C = (x, 4)$ seja retângulo em B.*

Exercício 22. *Dados $A = (x, 5)$, $B = (-2, 3)$ e $C = (4, 1)$, obter x tal que A equidiste de B e C.*

Exercício 23. *Obtenha o circuncentro do $\triangle ABC$, dado que $A = (8, 11)$, $B = (-4, -5)$ e $C = (-6, 9)$.*

Exercício 24. *Determine P de modo que $M = (a, 0)$, $N = (0, a)$ e $\triangle MNP$ seja equilátero.*

Exercício 25. *Dados os pontos $B = (2, 3)$ e $C = (-4, 1)$, determinar o vértice A do triângulo ABC, sabendo que é ponto do eixo Oy e que vê o segmento $\overline{BC}$ sob ângulo reto.*

Exercício 26. *Dados $A = (-2, 4)$ e $B = (3, -1)$, vértices consecutivos de um quadrado, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 27. *Calcular o comprimento da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC onde $A = (0, 0)$, $B = (3, 7)$ e $C = (5, -1)$.*

Exercício 28. *Dados os vértices consecutivos $A = (-2, 1)$ e $B = (4, 4)$, de um paralelogramo, e o ponto $E = (3, -1)$, intersecção de suas diagonais, determinar os outros dois vértices.*

Exercício 29. *Do triângulo ABC são dados: o vértice $A = (2, 4)$, o ponto $M = (1, 2)$ médio do lado $\overline{AB}$ e ponto $N = (-1, 1)$ médio do lado $\overline{BC}$. Calcular o perímetro deste triângulo.*

Exercício 30. *Se $M = (2, 1)$, $N = (3, 3)$ e $P = (6, 2)$ são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente, de um triângulo ABC, determinar as coordenadas de A, B e C.*

Exercício 31. *Num triângulo ABC são dados: $A = (2, 0)$; $M = (-1, 4)$, que é ponto médio do lado $\overline{AB}$; $d(A, B) = 10$ e $d(B, C) = 10\sqrt{2}$. Obter os outros vértices de ΔABC.*

Exercício 32. *Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.*

Exercício 33. *O quadrilátero de vértices $A = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $B = (\frac{1}{2}, 2)$, $C = (2, -\frac{3}{2})$ e $D = (0, -\frac{5}{2})$ é um paralelogramo? Justifique sua resposta.*

Exercício 34. *Mostre que a área do triângulo determinado pelos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) é $\frac{|D|}{2}$, onde*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Exercício 35. *O losango $ABCD$ tem diagonal $\overline{DB}$ paralela ao vetor $\vec{v} = (1, 2)$. Se $A = (-1, 2)$ e $B = (3, 5)$; determine os outros vértices de $ABCD$.*

Exercício 36. *Um trapézio é dito isósceles quando os seus lados **não** paralelos são congruentes. O trapézio isósceles $ABCD$ tem lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, onde $\overline{AD}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$. Se $A = (0, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (2, 3)$, determine o vértice D.*

Exercício 37. *Os pontos $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(49, 100)$ são colineares?*

Exercício 38. *Determinar y para que os pontos $(3, 5)$, $(-3, 8)$ e $(4, y)$ sejam colineares.*

Exercício 39. *Mostrar que $A = (a, 2a + 1)$, $B = (a + 1, 2a + 1)$ e $C = (a + 2, 2a + 5)$ são colineares para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.*

Exercício 40. *Se $A = (0, a)$, $B = (a, -4)$ e $C = (1, 2)$, para quais valores de a existe $\triangle ABC$?*

2. Retas e equações

Dado que os pontos "ganharam" coordenadas e uma reta é um conjunto de pontos, vamos investigar o que se pode dizer das coordenadas dos pontos dessa reta.

Definição 2. *Diremos que um vetor $\vec{v}$* ***é um vetor diretor de uma reta*** *r se, e somente se, $\vec{v}//r$ e $\vec{v}$ é não nulo.*

Proposição 4. *Sejam r uma reta, $A \in r$ e $\vec{v}$ um vetor diretor de r. Para o ponto X,*

$$X \in r \text{ se, e somente se, existe (único) } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } X = A + \lambda\vec{v}.$$

Demonstração. Dado que $A \in r$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, se X é ponto,

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX}//r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX}//\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Fixemos $X \in r$, logo $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$. Sendo assim, $X = A + \overrightarrow{AX} = A + \lambda\vec{v}$. Se $X = A + \mu\vec{v}$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$, então $\overrightarrow{AX} = \lambda\vec{v} = \mu\vec{v}$. Visto que $\vec{v}$ não é nulo, $\lambda = \mu$ e garantimos a unicidade. Por outro lado, se $X = A + \beta\vec{v}$, então $\overrightarrow{AX} = \beta\vec{v}$ e daí $X \in r$. □

Definição 3. *Dados um ponto A e um vetor $\vec{v} \neq 0$, fica determinada uma* ***única*** *reta r tal que $A \in r$ e $\vec{v}//r$. A equação*

$$X = A + \lambda\vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}) \ .$$

é chamada de ***equação vetorial da reta*** *r ou* ***equação da reta*** *r* ***na forma vetorial****. Muitas vezes a reta r será chamada* ***a reta que passa por*** *A* ***e é paralela a*** *$\vec{v}$. Essa situação será representada por*

$$r\colon X = A + \lambda\vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}) \ .$$

É importante observar que reta não tem equação vetorial única, pois, quando fixamos outro ponto da reta ou outro vetor diretor da reta, a equação pode efetivamente mudar.

Proposição 5. *Sejam r, reta, A e B, pontos, e $\vec{v}$ e $\vec{u}$, vetores não nulos. Então "$X = A + \lambda\vec{v}$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$)" e "$Y = B + \mu\vec{u}$ (para $\mu \in \mathbb{R}$)" são equações vetoriais de r se, e somente se, $A \in r$ e $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos a r.*

Demonstração. Suponhamos que "$X = A + \lambda\vec{v}$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$)" e "$Y = B + \mu\vec{u}$ (para $\mu \in \mathbb{R}$)" sejam equações vetoriais da reta r. Daí $A, B \in r$ e $\overrightarrow{AB}//r$. Naturalmente $\vec{v}$ e $\vec{u}$ são paralelos a r.

Agora suponhamos que $A \in r$ e $\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são paralelos a r. Naturalmente $B \in r$. Logo as equações citadas anterioremente são equações vetoriais de r. □

Se fixamos um sistema de coordenadas para o plano e seja $A = (x_0, y_0)$, um ponto e $\vec{v} = (p, q)$, vetor não nulo, então, para $X = (x, y)$,

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(p, q), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda p \\ y = y_0 + \lambda q \end{cases}, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, a reta que passa por A e é paralela ao vetor $\vec{v}$ é descrito por um sistema de equações que será chamada de **sistema de equações paramétricas** para a reta.

Proposição 6. *Sejam $A = (x_0, y_0)$ um ponto, $\vec{v} = (p, q)$ um vetor e r a reta que passa por A e é paralela a r. Então, para o ponto $X = (x, y)$,*

$$X \in r \text{ se, e somente se, } qx - py + (py_0 - qx_0) = 0.$$

Demonstração. Observamos que

$$X \in r \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AX}//\vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0, y - y_0)//(p, q) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & p \\ y - y_0 & q \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad q(x - x_0) - p(y - y_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad qx - py + (py_0 - qx_0) = 0 \ .$$

□

É importante notar que a equação "$qx - py + (py_0 - qx_0) = 0$" pode ser escrita como "$ax + by + c = 0$", para $a, b, c \in \mathbb{R}$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Teorema 7. *Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. O conjunto dos pontos $X = (x, y)$ que satisfazem a equação $Ax + By + C = 0$ é um reta perpendicular ao vetor (A, B).*

Demonstração. Sejam $\vec{n} = (A, B)$ e $\vec{v} = \vec{n}^{\perp}$. Como $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, então $\vec{n} \neq \vec{0}$. Sejam $x_0 = -\frac{AC}{\|\vec{n}\|^2}$, $y_0 = -\frac{BC}{\|\vec{n}\|^2}$ e $P = (x_0, y_0)$. Como

$$Ax_0 + By_0 + C = \frac{-A^2C - B^2C}{\|\vec{n}\|^2} + C = -\frac{(A^2 + B^2)C}{\|\vec{n}\|^2} + C = 0 \ ,$$

conclui-se que P satisfaz a equação $Ax+By+C = 0$. Ainda $C = -Ax_0 - By_0$. Para o ponto $X = (x, y)$,

$$\begin{gathered} Ax + By + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \\ 0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) = (A, B) \bullet (x - x_0, y - y_0) = \vec{n} \bullet \overrightarrow{PX} = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PX} // \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad X = P + \lambda \vec{v} \text{ (para } \lambda \in \mathbb{R}), \end{gathered}$$

ou equivalentemente, X está na reta que passa por P e é paralela ao vetor $\vec{v}$. Como $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{n}$, a reta é perpendicular a $\vec{n}$. □

Definição 4. *Toda equação da forma "$Ax + By + C = 0$" (com $A \neq 0$ ou $B \neq 0$), que descreve os pontos de uma reta r, será chamada de* ***equação geral da reta*** *r ou* ***equação de*** *r* ***na forma geral****. Indicaremos essa situação por*

$$r\colon Ax + By + C = 0 \ .$$

Exercício 41. *Obtenha equação geral para as seguintes retas:*

(1) eixo das abscissas
(2) eixo das ordenadas
(3) bissetriz dos quadrantes ímpares
(4) bissetriz dos quadrantes pares

Exercício 42. *Dados $A = (-3, 4), B = (2, 9), C = (2, 7)$ e $D = (4, 5)$, obtenha $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.*

Exercício 43. *Dados $A = (-5, -5)$, $B = (1, 5)$, $C = (19, 0)$ e $r\colon 5x - 3y = 0$, pergunta-se: r passa pelo baricentro do triângulo ABC?*

Exercício 44. *Determinar o ponto P, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que é equidistante de $B = (1, 3)$ e $C = (-3, 5)$.*

Exercício 45. *Determinar o ponto P, da bissetriz dos quadrantes pares, que equidista de $A = (8, -8)$ e $B = (12, -2)$.*

Exercício 46. *(1) Dados $A = (1, 1)$ e $B = (10, -2)$, obter o ponto no qual $\overleftrightarrow{AB}$ encontra o eixo Ox.*
(2) Dados $A = (3, 1)$ e $B = (5, 5)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta o eixo Oy.
(3) Dados $A = (2, -3)$ e $B = (8, 1)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes ímpares.
(4) Dados $A = (2, 4)$ e $B = (-4, 2)$, obter o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.

Exercício 47. *Determinar $P = (a, b)$ colinear simultaneamente com $A = (-1, -2)$ e $B = (2, 1)$ e com $C = (-2, 1)$ e $D = (1, -4)$.*

Exercício 48. *Ache P da reta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que $d(A, P) = 5$, para $A = (0, -25)$ e $B = (-2, -11)$.*

Corolário 2. *Sejam $r\colon Ax + By + C = 0$ e $s\colon Dx + Ey + F = 0$, retas. Então*

$$r // s \quad \text{se, e somente se,} \quad \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. Sejam $\vec{n_1} = (A, B)$ e $\vec{n_2} = (D, E)$.

Suponhamos que $r // s$ e seja $\vec{v}$ é um vetor diretor de r. Consequentemente $\vec{v}$ também é vetor diretor de s. Pelo teorema anterior, $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ são ambos ortogonais a $\vec{v}$ e consequetemente paralelos a $\vec{v}^{\perp}$. Dado que os três vetores citados são não nulos, $\vec{n_1} // \vec{n_2}$ e o determinante do enunciado é nulo.

Suponhamos que o determinante do enunciado é nulo. Logo $\vec{n_1} // \vec{n_2}$. Seja $\vec{u} = (B, -A)$ e daí $\vec{u}^{\perp} = \vec{n_1}$. Sendo assim, $\vec{u}$ é vetor direto de r pois $\vec{u} \perp \vec{n_1}$. Mas também $\vec{u} \perp \vec{n_2}$ e assim, $\vec{u}$ é vetor diretor de s. Portanto r e s são retas paralelas. □

Corolário 3. *Sejam $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{R}$ tais que $A \neq 0$, ou $B \neq 0$, ou $A' \neq 0$ ou $B' \neq 0$. As equações "$Ax + By + C = 0$" e "$A'x + B'y + C' = 0$" determinam a mesma reta r se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $A' = \lambda A$, $B' = \lambda B$ e $C' = \lambda C$.*

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{n_1} = (A, B)$ e $\overrightarrow{n_2} = (D, E)$.

Suponhamos que "$Ax + By + C = 0$" e "$A'x + B'y + C' = 0$" determinem a mesma reta r. Pelo teorema anterior, se $\vec{v}$ é um vetor diretor de r, então $\overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{n_2} = \lambda \overrightarrow{n_1}$. Portanto $A' = \lambda A$ e $B' = \lambda B$. Como ambos os vetores não são nulos, $\lambda \neq 0$. Dado que $\left(-\frac{AC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}, -\frac{BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) \in r$,

$$0 = A'\left(-\frac{AC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + B'\left(-\frac{BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2}\right) + C' = C' - \frac{(\lambda A)AC + (\lambda B)BC}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = C' - \frac{\lambda(A^2 + B^2)C}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = C' - \lambda C \ .$$

Ou seja, $C' = \lambda C$.

Suponhamos que $A' = \mu A$, $B' = \mu B$ e $C' = \mu C$, para $\mu \in \mathbb{R}^*$. Logo

$$A'x + B'y + C' = \mu\big(Ax + By + C\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax + By + C = 0 \ .$$

Sendo assim, as duas equações determinam a mesma reta. □

Proposição 8. *Sejam $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, pontos distintos. Para $X = (x, y)$,*

$$X \in \overleftrightarrow{PQ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_0 & x_1 \\ y & y_0 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Demonstração. Imediato do fato que $X \in \overleftrightarrow{PQ}$ se, e somente se, X, P e Q estão alinhados. □

Exercício 49. *Determinar as equações das retas suportes dos lados do triângulo cujos vértices são $A = (0, 0)$, $B = (1, 3)$ e $C = (4, 0)$.*

Exercício 50. *Determinar equação geral da reta definida por $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ e $(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2})$.*

Exercício 51. *Uma reta passa por $A = (p, q)$, $B = (3, -2)$ e $(0, 0)$. Qual a relação entre p e q?*

Exercício 52. *Prove que os pontos $A = (a, b + c)$, $B = (b, a + c)$ e $C = (c, a + b)$ são colineares e determinar a equação geral da reta que os contem.*

Exercício 53. *Determinar a intersecção das retas $x + 2y = 3$ e $2x + 3y = 5$.*

Exercício 54. *As retas suportes dos lados de um triângulo são $3x - 4y = 0$, $x + y - 7 = 0$ e $4x - 3y = 0$. Mostrar que esse triângulo é isósceles.*

Exercício 55. *Prove que as retas $2x + 3y - 1 = 0$, $x + y = 0$ e $3x + 4y - 1 = 0$ concorrem no mesmo ponto.*

Exercício 56. *Demonstre que as retas $x - 2y = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ e $(1 + k)x + 2(1 - k)y - 8 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto para qualquer $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 57. *Determinar a para que as retas $x + 2y - 2a = 0$, $ax - y - 3 = 0$ e $2x - 2y - a = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.*

Exercício 58. *Demonstrar que as retas $2x + 3y = 0$, $(2k + 1)x + (3k - 2)y + 5 = 0$ e $x - 2y + 5 = 0$ são concorrentes no mesmo ponto, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.*

Exercício 59. *Determinar m de modo que $3x + y - m = 0$, $3x - y + 1 = 0$ e $5x - y - 1 = 0$ delimitem um triângulo.*

Exercício 60. *Qual é a equação da reta que passa por $P = (3, 1)$, intercepta $r\colon 3x - y = 0$ em A, intercepta $s\colon x + 5y = 0$ em B, de modo que P é ponto médio de $\overline{AB}$.*

Exercício 61. *Dado o ponto $A = (1, 2)$, determine as coordenadas de dois pontos P e Q situados respectivamente em $y = x$ e $y = 4x$, de tal modo que A seja o ponto médio de segmentos $\overline{PQ}$.*

Exercício 62. *Determinar o perímetro do triângulo ABC que verifica as seguintes condições: A pertence ao eixo x; B pertence ao eixo y; a reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem equação $x - y = 0$; e a reta $\overleftrightarrow{AC}$ tem equação $x + 2y - 3 = 0$.*

Exercício 63. *Sabe-se que: A pertence ao eixo das abscissas; B pertence à bissetriz $y = x$; $x+y+5 = 0$ é equação da reta $\overleftrightarrow{AC}$; e $2x - y - 2 = 0$ é equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$. Determine A, B e C.*

Exercício 64. *Determinar α de modo que $P = (3, \alpha)$ seja ponto do interior do triângulo definido pelas retas $2x - y = 0$, $x + y = 0$ e $7x + y - 36 = 0$.*

Teorema 9. *Sejam $r\colon Ax + By + C = 0$ e $s\colon Dx + Ey + F = 0$ retas não paralelas. Se θ é a medida dos menores ângulos entre r e s, então*

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}\right|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} \ .$$

onde $\overrightarrow{n_1} = (A, B)$ e $\overrightarrow{n_2} = (D, E)$.

Demonstração. Sejam $\overrightarrow{v_1} = (B, -A)$ e $\overrightarrow{v_2} = (E, -D)$. Então $\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \overrightarrow{n_1}$ e é vetor diretor de r. Também $\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \overrightarrow{n_2}$ e é vetor diretor da reta s. Facilmente concluímos que

$$\theta = \begin{cases} \text{ang}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) & , \quad \text{se ang}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \text{ang}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto $\cos\theta = \left|\cos(\text{ang}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}))\right|$, ou seja,

$$\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{v_1} \bullet \overrightarrow{v_2}\right|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\|} = \frac{|BE + AD|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}\right|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|} \ .$$

□

Exercício 65. *Determinar a posição relativa das seguintes retas, tomadas duas a duas:*

(1) $r\colon 2x - y + 3 = 0$ *(3)* $t\colon 3x - 6y = -3$ *(5)* $v\colon 2x + 4y + 3 = 0$
(2) $s\colon 2x - y + 5 = 0$ *(4)* $u\colon x - y + 3 = 0$ *(6)* $w\colon 4x - 2y = -6$

Exercício 66. *Discutir a posição relativa entre r e s, para:*

(1) $r\colon (m-1)x + my - 1 = 0$ *e* $s\colon (1-m)x + (m+1)y + 1 = 0$.
(2) $r\colon mx + y - p = 0$ *e* $s\colon 3x + 3y - 7 = 0$.

Corolário 4. *Nas mesmas condições da teorema anterior, $r \perp s$ se, e somente se, $AD + BE = 0$.*

Exercício 67. *Mostre que, para as retas $r\colon y = a_1x + b_1$ e $s\colon y = a_2x + b_2$,*

$$r \perp s \text{ se, e somente se, } a_1a_2 = -1.$$

Exercício 68. *Sejam $r\colon y = a_1x + b_1$ e $s\colon y = a_2x + b_2$, retas não paralelas e não perpendiculares. Mostre que, se θ é a medida do menor ângulo entre r e s, então $\text{tg}\,\theta = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|$.*

Teorema 10. *Seja r a reta que tem equação vetorial $r\colon X = P + \lambda\overrightarrow{v}$ (para $\lambda \in \mathbb{R}$). Dado um ponto Q, o ponto de r mais próximo de Q é o ponto $R = P + \text{proj}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{PQ}$.*

Demonstração. Fixemos $\lambda \in \mathbb{R}$ e seja $X = P + \lambda\overrightarrow{v}$. Logo $\overrightarrow{XQ} = \overrightarrow{XP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \lambda\overrightarrow{v}$ e

$$\|\overrightarrow{XQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ} - \lambda\overrightarrow{v}\|^2 = \left(\overrightarrow{PQ} - \lambda\overrightarrow{v}\right) \bullet \left(\overrightarrow{PQ} - \lambda\overrightarrow{v}\right) = \|\overrightarrow{v}\|^2\lambda^2 - 2\left(\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{v}\right)\lambda + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 =$$
$$\left(\|\overrightarrow{v}\|\lambda - \frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2 .$$

Tomemos $\mu = \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|^2}\right)$ e $R = P + \mu\overrightarrow{v}$. Naturalmente $R \in r$ e $\overrightarrow{PR} = \mu\overrightarrow{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{PQ}$. Ainda $\|\overrightarrow{RQ}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 - \left(\frac{\overrightarrow{PQ} \bullet \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}\right)^2$. Se $X \in r$, então $\|\overrightarrow{XQ}\|^2 \geq \|\overrightarrow{RQ}\|^2$, ou equivalentemente, $\|\overrightarrow{XQ}\| \geq \|\overrightarrow{RQ}\|$. Sendo assim, R é ponto de r mais próximo de Q. □

Corolário 5. *Seja r a reta de equação geral $r\colon Ax + By + C = 0$. Dado um ponto $Q = (\alpha, \beta)$, a distância de Q à reta r é*

$$d(Q, r) = \frac{\left|A\alpha + B\beta + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ .$$

Demonstração. A distância do ponto Q à reta r é a distância de Q ao ponto de r mais próximo de Q.

Sejam $\vec{n} = (A, B)$ e $\vec{v} = \vec{n}^{\perp}$. Então $\vec{n}$ é perpendicular a r e que $\vec{v}$ é vetor diretor de r. Tomemos $P \in r$. Por resultado anterior, $\overrightarrow{PQ} = \text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ} + \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$. Por outro lado, $\overrightarrow{PR} = \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ}$. Daí

$$\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \text{proj}_{\vec{v}}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ} \ .$$

Logo $d(Q, r) = \|\overrightarrow{RQ}\| = \|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$. Se $P = (x_0, y_0) \in r$, então $C = -Ax_0 - By_0$. Logo

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{n} = (\alpha - x_0, \beta - y_0) \bullet (A, B) = A\alpha + B\beta - Ax_0 - By_0 = A\alpha + B\beta + C \ ,$$

e concluímos a tese. □

Exercício 69. *Achar a distância da reta* $r\colon \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -7 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, *à origem.*

Exercício 70. *Calcular a distância* P *à reta* r *nos seguintes casos:*

(1) $P = (-3, -1)$ *e* $r\colon 3x - 4y + 8 = 0$
(2) $P = (3, 2)$ *e* $r\colon 5x - 5y + 2 = 0$
(3) $P = (1, -2)$ *e* $r\colon \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 1$
(4) $P = (-2, 3)$ *e* $r\colon \begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = 24t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
(5) $P = (-1, -2)$ *e* $r\colon \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)x + \left(\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)y = 5$

Exercício 71. *Calcular o comprimento da altura* $\overline{AH}$ *do triângulo* $A = (-3, 0)$, $B = (0, 0)$ *e* $C = (6, 8)$. *Determine as coordenadas do ponto* H.

Exercício 72. *O trapézio de vértices* $A = (0, 0)$, $B = (7, 1)$, $C = (6, 5)$ *e* $D = (-8, 3)$ *tem qual altura?*

Exercício 73. *O ponto* $P = (2, -5)$ *é um vértice de um quadrado que tem um dos seus lados não adjacentes a* P *sobre a reta* $x - 2y - 7 = 0$. *Qual a área do quadrado?*

Exercício 74. *Calcular a distância entre as retas* $3x + 4y - 13 = 0$ *e* $3x + 4y + 7 = 0$.

Exercício 75. *Calcular a distância entre as retas* $ax + by + c = 0$ *e* $ax + by + d = 0$.

Exercício 76. *Determinar os pontos da reta* $y = 2x$ *que estão à distância* 2 *da reta* $4x + 3y = 0$.

Exercício 77. *Determinar as equações da(s) reta(s) que forma(m) ângulo de medida* $\frac{\pi}{4}$ *com o eixo* x *e estão à distância* $\sqrt{2}$ *do ponto* $P = (3, 4)$.

Exercício 78. *Obter uma reta paralela a* $r\colon x + y + 6 = 0$ *e distante* $\sqrt{2}$ *do ponto* $C = (1, 1)$.

Exercício 79. *Determinar as equações das perpendiculares à reta* $r\colon 7x - 24y + 1 = 0$, *as quais estão à distância* 3 *do ponto* $P = (1, 0)$.

Exercício 80 (Pesquise!)**.** *Defina "simetria com relação a uma reta". Sejam* $P = (\alpha, \beta)$ *e* $r\colon Ax + By + C = 0$. *Mostre que* $Q = \left(\alpha - \frac{2A(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2}, \beta - \frac{2B(A\alpha+B\beta+C)}{A^2+B^2}\right)$ *é o ponto simétrico a* P *com relação à reta* r.

Exercício 81. *Determine o ponto simétrico de* (α, β) *com relação às retas:*

(1) $x = 0$ *(2)* $y = 0$ *(3)* $x - y = 0$ *(4)* $x + y = 0$ *(5)* $x - y = 1$ *(6)* $y = 2x + 1$

Exercício 82. *Sejam* $A = (x_A, y_A)$ *e* $B = (x_B, y_B)$ *dois pontos distintos. Mostre que os pontos que equidistam de* A *e* B *determinam uma reta – denominada* ***mediatriz do segmento*** $\overline{AB}$. *Determine características da mediatriz do segemento* $\overline{AB}$ *em função de* A *e* B.